Subject

بنام خدا   فصل دوم : بردارها

کمیت‌های فیزیکی از نظر رفتار به دو دسته تقسیم می‌شوند . ۱- کمیت‌های نرده‌ای   ۲- کمیت‌های برداری

۱- کمیت‌های نرده‌ای به کمیت‌هایی گفته می‌شود که فقط دارای مقدار (اندازه) هستند و برای بیان آنها کافیست عدد + واحد آن معلوم باشد . برای مثال ، اگر بگوییم طول یک زمین بازی 50 m است ، راجع به طول همه اطلاعات بیان شده و برای شنونده ، در مورد طول زمین ، ابهامی وجود ندارد .

۲- کمیت‌های برداری به کمیت‌هایی گفته می‌شود که دارای اندازه و جهت باشند و برای بیان آنها باید عدد + واحد + جهت مشخص شود . یقین نکردن جهت ، باعث ایجاد ابهام برای شنونده است .

برای مثال ، اگر بگوییم متحرکی از یک نقطه (مثل A) حرکت کرده و 40 m جابجا می‌شود تا به نقطه B برسد ، مقصد آن یعنی نقطه B معلوم نیست زیرا سمت حرکت را مشخص نکرده‌ایم . (B می‌تواند در سمت چپ یا راست یا .... از نقطه A باشد) .

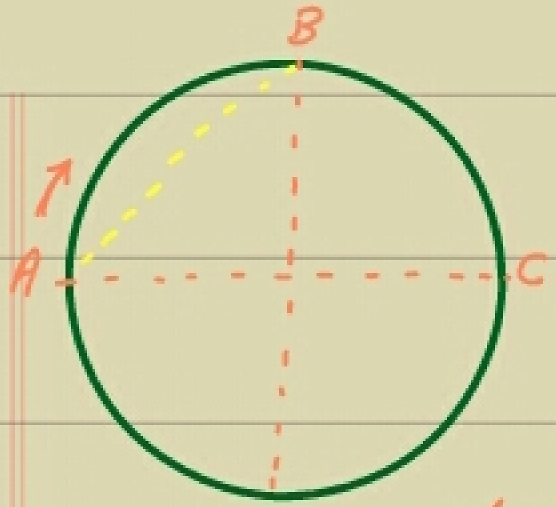
کمیت‌هایی مانند طول - جرم - زمان - حجم - انرژی - چگالی و .... کمیت نرده‌ای هستند .

کمیت‌هایی مانند جابجایی - سرعت - شتاب - نیرو - تکانه و .... کمیت برداری هستند .

از نظر محاسبات ریاضی ، کمیت‌های نرده‌ای تابع اعمال جبری هستند یعنی جمع و تفاضل و ضرب و تقسیم آنها مثل اعداد معمولی است (برای جمع و تفاضل باید جنس کمیت‌ها یکسان باشد) .

ولی کمیت‌های برداری تابع اعمال جبری نیستند و باید ریاضی حاکم بر بردارها بررسی شود .

مثال ۱- دوچرخه سواری در یک مسیر دایره‌ای افقی به شعاع 100 m از نقطه شروع (A) حرکت می‌کند . مسافتی که دوچرخه سوار طی می‌کند و جابجایی وی را در حالتهای زیر حساب کنید :



الف) وقتی یک ربع از مسیر دایره ای طی شود. (B)

ب) وقتی نصف مسیر دایره ای طی شود. (C)

ج) وقتی یک دور کامل طی شود. (A)

حل: مسافت طی شده یعنی طول مسیری که پیموده شده و یک کمیت نرده ای است.

جابجائی، خط مستقیمی است که ابتدای حرکت (مبداء) را به انتهای حرکت (مقصد) وصل می کند و یک کمیت برداری است.

شعاع $R = 100 m$, $\pi \simeq 3$

الف) از نقطه A به نقطه B:

مسافت $= \overset{\frown}{AB} = \frac{1}{4}($محیط دایره$) = \frac{1}{4}(2\pi R) = \frac{\pi}{2}R = \frac{3 \times 100}{2} = 150\ m$

جابجائی $= \overline{AB} = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} = 100\sqrt{2} = 141\ m$

ب) از نقطه A به C:

مسافت $= \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}($محیط دایره$) = 300\ m$

جابجائی $= \overline{AC} =$ قطر $= 100 \times 2 = 200\ m$

ج) از نقطه A به نقطه A:

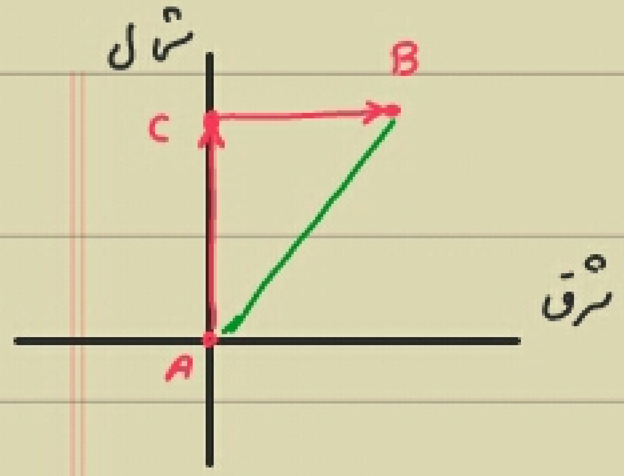
مسافت = محیط یک دور $= 2\pi R = 4 \times 150 = 600\ m$

جابجائی $= 0$ مبداء و مقصد برهم منطبق

مثال ۲ - شخصی از نقطه A شروع به حرکت کرده و ابتدا ۴۰ متر به سمت شمال رفته و پس از آن ۳۰ متر به طرف شرق حرکت می کند تا به نقطه B برسد. الف) مسافتی که شخص طی کرده چقدر است؟

ب) جابجائی شخص چقدر است؟

حل: با رسم یک نمودار ساده، خواهیم داشت:



$AC = ۴۰\ m \qquad CB = ۳۰\ m$

الف) مسافت طی شده یعنی طول مسیر از A تا B :

$AC + CB = ۴۰ + ۳۰ = ۷۰\ m$

ب) جابجائی AB یعنی خط مستقیم از A به B که در شکل برابر با وتر مثلث ACB است.

$$AB = \sqrt{(AC)^۲ + (CB)^۲} = \sqrt{۴۰^۲ + ۳۰^۲} = \sqrt{۱۶۰۰ + ۹۰۰} = \sqrt{۲۵۰۰} = ۵۰\ m$$

با توجه به مثالهای بالا، مشاهده می‌شود که جابجائی و مسافت، اگر چه از نظر واحد (متر) مشابه هستند ولی از نظر رفتار مثل هم نیستند.

هدف ما در این فصل بررسی روابط ریاضی روی بردارهاست.

انواع نمایش بردار: برای نشان دادن یک بردار، سه روش وجود دارد:

* الف) نمایش هندسی: در روش ترسیم، هر بردار با یک پاره خط جهت دار نشان داده می‌شود. اندازه پاره خط نشان دهنده مقدار بردار و جهت فلش (پیکان) نیز جهت بردار را نشان می‌دهد. (این روش برای یک و دو بعد مناسب است). برای اسم گذاری بردارها از حروف انگلیسی با علامت پیکان کوچک روی آن استفاده می‌شود مثلاً $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ و ...

a یا $|\vec{a}|$ برای نشان دادن اندازه (بزرگی) بردار استفاده می‌شود.

* ب) نمایش توصیفی: اندازه و جهت بردار به صورت جمله نویسی (توضیح) بیان می‌شود.

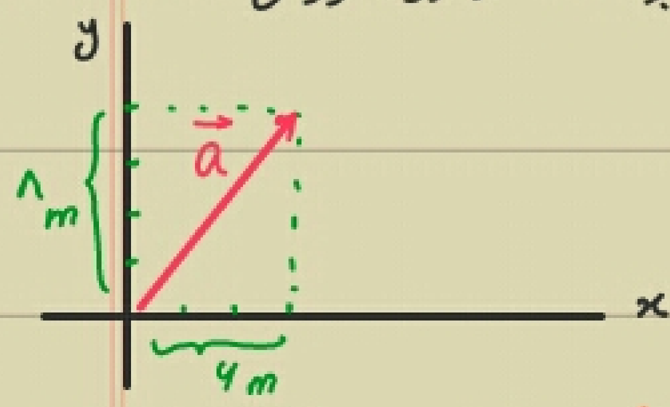
مثلاً: باد با سرعت $۶۰\ \frac{km}{h}$ با زاویه ۲۵° در جهت شمال شرقی می‌وزد.

یا بر یک جسم که روی سطح افقی است یک نیروی $۱۰۰\ N$ افقی به سمت راست وارد می‌شود.

ج) نمایش مولفه‌ای (ریاضی): در این روش هر بردار بر حسب اندازه تصویر آن روی محورهای مختصات بیان می‌شود. (معمولاً از دستگاه مختصات دکارتی (محورهای x و y و z که بر هم عمودند) استفاده می‌شود).

این روش برای حل مسائل مناسب است.

مثلاً یک جابجایی در نظر بگیرید که تصویر آن روی محور x ها برابر ۶m و روی محور y ها ۸m است.



$\vec{a}$ = (۶m روی محور x ها) + (۸m روی محور y ها)

برای نشان دادن راستای محورها از بردارهای یکه استفاده می‌شود که عبارتند از: ($\hat{i}$ برای محور x ، $\hat{j}$ برای محور y ، $\hat{k}$ برای محور z)

$\vec{a} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$ (نمایش مولفه‌ای بردار $\vec{a}$)

تبدیل یک بردار از اندازه و جهت به شکل مولفه‌ای و برعکس:

اگر اندازه بردار معلوم باشد (مثلاً a) و جهت آن نیز مشخص باشد (معمولاً با زاویه مثلثاتی θ) در این صورت:

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع کنار زاویه}}{\text{وتر مثلث}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{a_x}{a} \rightarrow a_x = a\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع روبروی زاویه}}{\text{وتر مثلث}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{a_y}{a} \rightarrow a_y = a\sin\theta$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \rightarrow \vec{a} = a\cos\theta\,\hat{i} + a\sin\theta\,\hat{j}$$

مثال ۳- بردار $\vec{a}$ به طول ۲۰m با زاویه ۳۷° (مثلثاتی) را در نظر گرفته و شکل مولفه‌ای آن را بنویسید.

حل:

$$a_x = a\cos\theta = 20\cos(37^\circ) = 20\,(0.8) = 16$$

$$\rightarrow \vec{a} = 16\hat{i} + 12\hat{j}$$

$$a_y = a\sin\theta = 20\sin(37^\circ) = 20\,(0.6) = 12$$

مثال ۴- نیروی ۲۰۰ نیوتن با زاویه مثلثاتی ۱۲۷° را به صورت مولفه‌ای بنویسید.

حل:

$F = 200\,N \quad , \quad \theta = 127^\circ$

$F_x = F\cos\theta = 200\cos(127) = 200(-0.6) = -120\ N$

$F_y = F\sin\theta = 200\sin(127) = 200(0.8) = 160\ N \rightarrow \vec{F} = -120\,\hat{i} + 160\,\hat{j}\ (N)$

محورهای x و y، صفحه را به ۴ ناحیه تقسیم می‌کنند که به ربع اول تا چهارم معروف است، این نواحی از سمت مثبت محور x و پادساعتگرد (مثلثاتی) شماره‌گذاری می‌شوند. علامت مولفه‌های بردار در این نواحی مطابق شکل است.

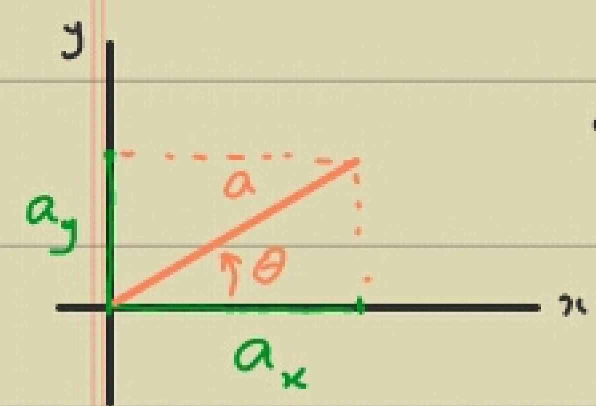
مثلاً: $\vec{a} = 3\hat{i} + 6\hat{j}$ در ربع اول

$\vec{b} = -4\hat{i} + 3\hat{j}$ در ربع دوم

$\vec{c} = -2\hat{i} - 6\hat{j}$ در ربع سوم

$\vec{d} = 5\hat{i} - 7\hat{j}$ در ربع چهارم

تبدیل شکل مولفه‌ای یک بردار، به اندازه و جهت.



اگر a_x (مولفه x) و a_y (مولفه y) بردار معلوم باشند.

$\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j}$

قضیه فیثاغورس: $a^2 = a_x^2 + a_y^2 \rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه}}{\text{ضلع کنار زاویه}} \rightarrow \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \rightarrow \theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$

مثال ۵- اندازه و جهت نیروی $\vec{F} = 8\hat{i} + 6\hat{j}$ را بدست آورید.

حل: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \rightarrow F = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = \underline{10}\ N$

$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \underline{37^\circ}$ در ربع اول.

مثال ۶- اندازه و جهت بردارهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\vec{a} = -5\hat{i} + 8\hat{j}$

حل) $a = \sqrt{25+64} = \sqrt{89} \simeq 9{,}4$

$\tan\theta_1 = \frac{8}{-5} = -1{,}6 \longrightarrow \theta_1 = \tan^{-1}(-1{,}6) = -58^\circ$

با توجه به اینکه بردار $\vec{a}$ در ناحیه دوم قرار دارد، زاویه مثلثاتی θ برابر است با:

$\theta = 180 - 58 = 122^\circ$

ب) $\vec{b} = 4\hat{i} - 7\hat{j}$

حل) $b = \sqrt{16+49} = \sqrt{65} \simeq 8{,}1$

$\tan\theta_1 = \frac{-7}{4} = -1{,}75 \longrightarrow \theta_1 = \tan^{-1}(-1{,}75) = -60{,}25^\circ$

با توجه به اینکه بردار b در ناحیه چهارم است، زاویه مثلثاتی θ برابر است با:

$\theta = 360 - 60{,}25 \longrightarrow \theta = 299{,}75^\circ$

ج) $\vec{c} = -7\hat{i} - 8\hat{j}$

حل) $c = \sqrt{49+64} = \sqrt{113} = 10{,}6$

$\tan\theta_1 = \frac{-8}{-7} = 1{,}14 \longrightarrow \theta_1 = \tan^{-1}(1{,}14) = 48{,}8^\circ$

با توجه به اینکه $\vec{c}$ در ناحیه سوم است، زاویه مثلثاتی θ برابر است با:

$\theta = 180 + 48{,}8 = 228{,}8^\circ$

اعمال ریاضی جمع و تفاضل و ضرب و تقسیم روی بردارها:

نکته ۱: برای بردارها، تقسیم تعریف نشده است. بنابراین شکل $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ معنا ندارد.

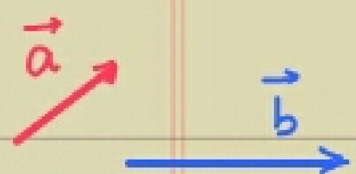
نکته ۲: از آنجا که برای بردارها، قرینه تعریف شده است ($-\vec{b}$ قرینه $\vec{b}$ است) می‌توان

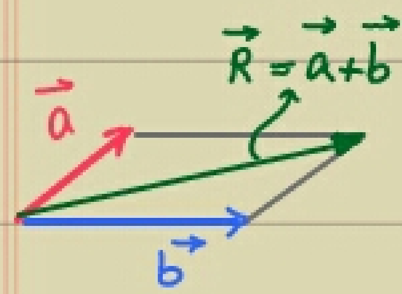
تفاضل برداری $\vec{a}-\vec{b}$ را به شکل جمع برداری $\vec{a}+(-\vec{b})$ بیان کرد.

جمع برداری ($\vec{a}+\vec{b}$) :

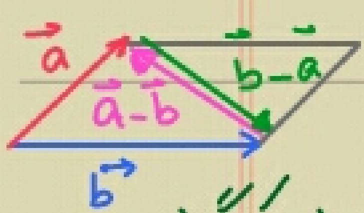
الف) روش هندسی (ترسیم) شامل
- ۱- روش متوازی الاضلاع :
- ۲. روش مثلث (قابل تعمیم به چندضلعی) :

۱. روش متوازی الاضلاع : برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دلخواه، ابتدا هر دو بردار را از یک نقطه رسم کرده و سپس از دو خط ایجاد شده یک متوازی الاضلاع ایجاد می‌شود. در این صورت قطری که از ابتدای دو بردار رسم می‌شود، مجموع یا برآیند آنها است.





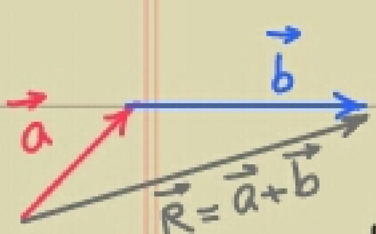
نکته: در همین متوازی الاضلاع، قطری که دو انتهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به هم وصل می‌کند، تفاضل دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$ یا $\vec{b}-\vec{a}$ است.



جهت بردار تفاضل به طرف برداری است که علامت منفی ندارد.

$\vec{a}-\vec{b}$ به طرف $\vec{a}$ و $\vec{b}-\vec{a}$ به طرف $\vec{b}$ بنابراین $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{b}-\vec{a}$ قرینه یکدیگرند.

۲- روش مثلث : در این روش بردارها را پشت سرهم قرار می‌دهیم. در این صورت، برداری که ابتدای اولی را به انتهای دومی وصل کند، برآیند یا مجموع بردارهاست.



در حالتی که تعداد بردارها زیاد باشد، روش مثلث قابل تعمیم بوده و کافیست بردارها پشت سرهم قرار گیرند، برداری که ابتدای اولی را به انتهای آخری وصل کند، برآیند بردارهاست.

اگر زاویه میان دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با θ نشان دهیم، برای اندازه بردار مجموع و اندازه بردار تفاضل روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\vec{R}=\vec{a}+\vec{b} \longrightarrow R=|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$

$$\vec{R'}=\vec{a}-\vec{b} \longrightarrow R'=|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

مثال ۷- اگر اندازه مجموع دو بردار با اندازه تفاضل آنها برابر باشد، آن دو بردار نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

حل: $R=R' \rightarrow \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta} \longrightarrow \cos\theta=0 \rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

ب) جمع بردارها به روش مولفه‌ای:

اگر بردارها به شکل مولفه‌ای بیان شوند، برای جمع کافیست مولفه‌های هم جنس بردارها با هم جمع شوند و برای تفاضل آنها باید مولفه‌های هم جنس از یکدیگر کم شوند.

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\\ \vec{b}&=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}\end{aligned}\right\} \longrightarrow \vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\hat{i}+(a_y\pm b_y)\hat{j}+(a_z\pm b_z)\hat{k}$$

مثال ۸- برای بردارهای $\vec{a}=3\hat{i}+6\hat{j}$ ، $\vec{b}=5\hat{i}-8\hat{j}$ ، حاصل $\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{R'}=\vec{a}-\vec{b}$ را محاسبه کنید.

حل) $\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}=(3+5)\hat{i}+(6+(-8))\hat{j}=8\hat{i}-2\hat{j}$

$\vec{R'}=\vec{a}-\vec{b}=(3-5)\hat{i}+(6-(-8))\hat{j}=-2\hat{i}+14\hat{j}$

مثال ۹- بردارهای $\vec{a}=6\hat{i}+8\hat{j}-4\hat{k}$ ، $\vec{b}=-10\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$ و $\vec{c}=3\hat{i}-4\hat{j}$ را درنظرگرفته و موارد زیر را محاسبه کنید.

الف) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=?$

ب) $\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}=?$ ج) $2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=?$

حل) الف) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(6+(-10)+3)\hat{i}+(8+3+(-4))\hat{j}+(-4+6+0)\hat{k}=-\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}$

ب) $\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}=(-10-6+3)\hat{i}+(3-8+(-4))\hat{j}+(6-(-4)-0)\hat{k}=-13\hat{i}-9\hat{j}+10\hat{k}$

ج) $2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=2(6\hat{i}+8\hat{j}-4\hat{k})+(-10\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})-3(3\hat{i}-4\hat{j})$

$=(12+(-10)-9)\hat{i}+(16+3+12)\hat{j}+(-8+6)\hat{k}=-7\hat{i}+31\hat{j}-2\hat{k}$

مثال ۱۰- بردار $\vec{a}$ به طول 10^{cm} با بردار $\vec{b}$ به طول 20^{cm} زاویه 60° می‌سازد، اندازه مجموع دو بردار چقدر است؟

حل) $R=\sqrt{10^2+20^2+2(10)(20)\cos(60)}=\sqrt{100+400+400(\frac{1}{2})}=\sqrt{700}=26,46\ cm$

ضرب بردارها: برای بردارها دو نوع ضرب تعریف می‌شود:

۱- ضرب داخلی یا نرده‌ای یا نقطه‌ای $(\cdot)$

۲- ضرب خارجی یا برداری $(\times)$

نکته: ضرب عدد یا کمیت نرده‌ای در بردار به سادگی قابل انجام است و بین نرده‌ای و بردار هیچ علامتی برای ضرب استفاده نمی‌شود.

$c\vec{a} = \vec{b}$ ← $\vec{a}$ بردار ، c نرده‌ای

۱. تعریف ضرب داخلی:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

حاصل ضرب داخلی دو بردار، یک نرده‌ای می‌شود

$0<\theta<\frac{\pi}{2} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}>0$

$\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \longrightarrow$ شرط عمود بودن (تعامد)

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}<0$

با توجه به تعریف ضرب داخلی، برای بردارهای یکه خواهیم داشت:

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$$

بنابراین ضرب داخلی به شکل مولفه‌ای بصورت زیر است:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

مثال ۱۱. حاصلضرب داخلی $\vec{a}=3\hat{i}-6\hat{j}$ و $\vec{b}=4\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$ را بدست آورید.

حل: $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3)(4)+(-6)(2)+(0)(-8) = 12-12=0$

چون $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ پس $\vec{a}\perp\vec{b}$.

نکته: برای تعیین زاویه میان دو بردار از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \longrightarrow \cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

مثال ۱۲- زاویه میان دو بردار $\vec{a}=4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ و $\vec{b}=6\hat{i}-8\hat{j}+4\hat{k}$ را بدست آورید.

حل: $\vec{a}\cdot\vec{b} = (4)(6)+(2)(-8)+(-3)(4) = 24-16-12 = -4$

$a=\sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$, $b=\sqrt{36+64+16} = \sqrt{116}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{-4}{\sqrt{29}\sqrt{116}} = \frac{-4}{58} = -0.069 \rightarrow \theta = \cos^{-1}(-0.069) = 94^\circ$$

۱- تعریف ضرب خارجی: حاصل ضرب خارجی دو بردار، یک بردار جدید می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec a \times \vec b = \vec c \longrightarrow c = |\vec a \times \vec b| = ab\sin\theta$$

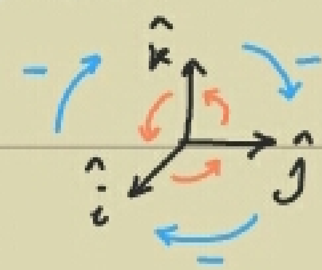
بردار $\vec c$ بر $\vec a$ و $\vec b$ عمود است و جهت آن با قاعده دست راست تعیین می‌شود:

انگشتان دست راست از بردار اول ($\vec a$) به سمت بردار دوم ($\vec b$) مشت می‌کنیم، انگشت شست در جهت حاصل ضرب $\vec a \times \vec b$ است.

نکته: $|\vec a \times \vec b| = |\vec b \times \vec a|$ و جهت $\vec a \times \vec b$ با $\vec b \times \vec a$ مخالف است بنابراین:

$$\vec a \times \vec b = -(\vec b \times \vec a)$$

با استفاده از تعریف بالا، برای بردارهای یکه خواهیم داشت:



$$\hat i \times \hat i = \hat j \times \hat j = \hat k \times \hat k = 0$$

$$\hat i \times \hat j = \hat k \quad , \quad \hat j \times \hat k = \hat i \quad , \quad \hat k \times \hat i = \hat j$$

برحسب بردارهای یکه، حاصلضرب خارجی به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec a \times \vec b = (a_y b_z - a_z b_y)\hat i + (a_z b_x - a_x b_z)\hat j + (a_x b_y - a_y b_x)\hat k$$

تعبیر هندسی حاصلضرب خارجی:

$$h = b\sin\theta$$

$$S_{\text{متوازی الاضلاع}} = ah = ab\sin\theta = |\vec a \times \vec b|$$

اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که از دو بردار ایجاد می‌شود یا مساحت مثلثی که از دو بردار ایجاد می‌شود برابر است با نصف اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار.

مثال ۱۳- دو بردار $\vec a = 6\hat i + 2\hat j$ و $\vec b = -3\hat i + 5\hat j$ را درنظر بگیرید.

الف) حاصل ضرب داخلی دو بردار چقدر است؟

ب) زاویه میان دو بردار چقدر است؟

ج) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ را محاسبه کنید.

د) مساحت متوازی الاضلاع حاصل از $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چقدر است؟

حل)

الف) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 6(-3) + 2(5) = -18 + 10 = -8$

ب) $\cos\theta = \frac{a\cdot b}{ab} = \frac{-8}{\sqrt{40}\sqrt{34}} = -0.22 \longrightarrow \theta = \cos^{-1}(-0.22) = 102.7^\circ$

ج) $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} = (30 - (-6))\hat{k} = 36\hat{k}$

د) $S = |\vec{a}\times\vec{b}| = |36\hat{k}| = 36$

راه دوم: $S = |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta = (\sqrt{40})(\sqrt{34})\sin(102.7) = 35.98 \simeq 36$

علت اختلاف جزئی بین دو روش، استفاده از تقریب ها در محاسبات است.

مثال ۱۴- اگر مجموع دو بردار بر تفاضل آنها عمود باشد، دو بردار نسبت به یکدیگر چه وضعیتی دارند.

حل) $(\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-\vec{b}) \longrightarrow$ طبق شرط تعامد، باید حاصلضرب داخلی آنها صفر باشد

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0 \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a} - \cancel{\vec{a}\cdot\vec{b}} + \cancel{\vec{b}\cdot\vec{a}} - \vec{b}\cdot\vec{b} = 0$

$a^2 - b^2 = 0 \longrightarrow a = b$ دو بردار هم اندازه هستند.

مثال ۱۵- به ازای چه مقادیر m، دو بردار $\vec{a} = m\hat{i} + 4\hat{j}$ و $\vec{b} = 3\hat{i} - m^2\hat{j}$ برهم عمودند؟

حل) شرط عمود بودن $\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \longrightarrow 3m - 4m^2 = 0 \longrightarrow m(3-4m) = 0$

$\rightarrow m = 0$ یا $m = \frac{3}{4}$